

# Numerische Berechnung der gekoppelten Verteilungen von Potential und Temperatur für Wasserstoff-Lichtbögen endlicher Länge in axialen Magnetfeldern

J. RAEDER und S. WIRTZ

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. 25 a, 459–472 [1970]; eingegangen am 22. Dezember 1969)

The energy balance is used to derive a partial differential equation for the heat flux potential in a rotational symmetric arc column of finite length. This equation is combined with a corresponding equation for the electric potential in order to calculate the distributions of temperature and electric potential for an arc discharge in a strong axial magnetic field. Because the coupling of the two equations is very complicated, all investigations have to be made numerically. The influence of mass flow is studied by taking into account drastically simplified distributions of the azimuthal and radial flow velocities.

## 1. Einleitung

Die maximal erreichbaren Temperaturen in langen Wasserstofflichtbögen werden von den radialen Energieverlusten bestimmt. Den Anteil der Wärmeleitung an diesen Verlusten kann man durch ein starkes, axiales Magnetfeld sehr wesentlich vermindern. Auf diese Weise werden Achsentemperaturen bis zu etwa  $1,5 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{K}^{1-3}$  erreicht. Dazu werden Lichtbögen verwendet, deren Kathodendurchmesser (1,5–2 cm) klein ist gegen die Bogenlänge (10 cm bis 80 cm) und den Durchmesser des Kessels (6 cm bis 10 cm), der die Entladung umschließen muß, da diese bei vermindertem Druck brennt (5–10 Torr). Der zylindrische Teil der Bogensäule besitzt unter diesen äußeren Bedingungen einen Durchmesser von etwa 3 cm, der damit wesentlich kleiner als die lichte Weite des Kessels ist. Diese Beobachtung weist darauf hin, daß der Bogen nicht wesentlich durch die Kesselwand stabilisiert sein kann. Ein weiterer Beweis für diese Annahme ist das Versagen der Theorie zylindersymmetrischer Bögen<sup>4</sup> bei Verwendung des Kesseldurchmessers in der Randbedingung bei der Lösung der Energiegleichung. Nur die Verwendung des optischen Durchmessers führt dagegen zu besseren Resultaten. Dieses Ergebnis ist aber unbefriedigend, da sich am optisch sichtbaren Rand keine physikalische Wand mit vorgeschriebener Temperatur befindet.

Zur Lösung dieser Probleme wollen wir die Voraussetzung der Zylindersymmetrie aufgeben. Als wesentlichste Konsequenz folgte aus dieser Annahme ein über den Radius konstantes axiales elektrisches Feld. Gerade diese Folgerung trifft aber nicht mehr zu, wenn der Bogen zwischen kleinen Elektroden in einem starken axialen Magnetfeld brennt<sup>5</sup>. Dieses führt zu einer starken Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit und kann außerdem zu schnellen Rotationen der Bogensäule führen. Beide Effekte führen zu einer Konzentration des axialen elektrischen Feldes auf den zylindrischen Raum zwischen den Elektroden.

Wir werden deshalb das elektrische Feld nicht vorgeben, sondern aus der Potentialverteilung ableiten, die wir simultan mit der Temperaturverteilung berechnen wollen. Das entsprechende System von zwei partiellen Differentialgleichungen wird aus den Erhaltungsgleichungen für die elektrische Stromdichte und die innere Energie eines stationären, rotationssymmetrischen Bogens abgeleitet. Die Lösungen dieser Gleichungen sollen für verschiedene Modelle numerisch berechnet werden.

## 2. Grundlagen

### 2.1. Energiebilanz und Ohmsches Gesetz

Als Ausgangspunkte dienen die Erhaltungsgleichungen für die innere Energie  $u$  pro Volumeinheit

Sonderdruckanforderungen an Dr. J. RAEDER, Institut für Plasmaphysik, D-8046 Garching bei München.

<sup>1</sup> C. MAHN, H. RINGLER u. G. ZANKL, Z. Naturforsch. 23 a, 867 [1968].

<sup>2</sup> G. ZANKL, Veröffentlichung in Vorbereitung.

<sup>3</sup> D. LUDWIG, Bericht des Instituts für Plasmaphysik, IPP 3/88, Veröffentlichung in Vorbereitung.

<sup>4</sup> U. HEIDRICH, Z. Naturforsch. 20 a, 475 [1965].

<sup>5</sup> J. RAEDER u. S. WIRTZ, Z. Naturforsch. 24 a, 1433 [1969].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

und für die Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Für  $u$  gilt bei Vernachlässigung von Strahlung<sup>6</sup>:

$$du/dt + u \nabla \cdot \mathbf{u} + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times \quad (1)$$

( $\mathbf{E}^\times = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ist das elektrische Feld in dem Koordinatensystem, das sich mit der Schwerpunkts-geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Plasmas bewegt;  $p$  = Gesamtdruck).

$du/dt = \partial u / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla u$  ist die totale Änderung pro Zeiteinheit der inneren Energie für ein Volumenelement, das sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt. Die Änderung von  $u$  wird bewirkt durch den konvektiven Energietransport  $u \nabla \cdot \mathbf{v}$ , durch die Kompressionsarbeit  $p \nabla \cdot \mathbf{v}$ , durch die Divergenz des Wärmestroms  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  und durch die Ohmsche Heizung  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times$ .

Für  $\mathbf{j}$  verwenden wir die Form der Stromtransportgleichung, die Braginsky für ein vollionisiertes Zweikomponentenplasma im lokalen thermischen Gleichgewicht abgeleitet hat<sup>7</sup>. Im stationären Fall gilt:

$$\mathbf{j} = \sigma_1 \mathbf{E}_\parallel + \sigma_2 \mathbf{E}_\perp + \sigma_3 \mathbf{E}^\times \times \mathbf{h} + \beta_1 \nabla_\parallel T + \beta_2 \nabla_\perp T + \beta_3 \nabla T \times \mathbf{h} \quad (2)$$

mit

$$\mathbf{E}^\times = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{e n_e} \nabla p_e.$$

Die Indizes „ $\parallel$ “ und „ $\perp$ “ bezeichnen die Richtung parallel bzw. senkrecht zum Magnetfeld  $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{h}$  ( $\mathbf{h}$  ist der Einheitsvektor von  $\mathbf{B}$ ).

Da wir diese Gleichung auch für die Bereiche teilweiser Ionisation verwenden wollen, müssen wir den Einfluß der Stöße zwischen Elektronen und Neutralteilchen auf die Transportkoeffizienten  $\sigma$  und  $\beta$  berücksichtigen. Eine genauere Beschreibung und eine Formelsammlung für diese Transportkoeffizienten findet sich in<sup>5</sup>.

Wegen der Stationarität ( $\partial / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) können wir das elektrische Feld aus einem Potential  $\Phi$  ableiten:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi. \quad (3)$$

Daraus folgt zusammen mit  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  und dem Ohmschen Gesetz (2) eine partielle Differentialgleichung für  $\Phi$ , deren Koeffizienten im wesentlichen von der Temperatur und von  $B$  abhängen<sup>5</sup>. Aus der Lösung dieser Gleichung lassen sich die Komponenten des

elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  und der Stromdichte  $\mathbf{j}$  berechnen, wenn die Temperaturverteilung bekannt ist.

Über die Temperaturabhängigkeit der Transportkoeffizienten in der Energiebilanz und in der Potentialgleichung entsteht eine Kopplung zwischen den Verteilungen der Temperatur und des Potentials. Außerdem sind die beiden Gleichungen natürlich über den Quellterm  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times$  in der Energiebilanz miteinander verbunden.

Da wir eine rotationssymmetrische Bogenentladung untersuchen wollen, legen wir den folgenden Rechnungen ein Zylinderkoordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  zugrunde, dessen  $z$ -Richtung mit der Symmetrieachse der Entladung zusammenfällt.

## 2.2. Annahmen

Das für den Lichtbogen verwendete Modell wird durch folgende Annahmen bzw. Vernachlässigungen vereinfacht:

- a) Die Vorgänge sind stationär ( $\partial / \partial t = 0$ ).
- b) Alle Verteilungen sind rotationssymmetrisch ( $\partial / \partial \varphi = 0$ ).
- c) Im ganzen Bogen herrscht lokales thermodynamisches Gleichgewicht.
- d) Das Magnetfeld ist homogen und weist in  $z$ -Richtung ( $B \geq 1$  Tesla). Durch diese Annahme vernachlässigen wir die Magnetfelder der axialen und azimuthalen Ströme im Plasma. Die vernachlässigten Feldkomponenten liegen bei den Experimenten, mit denen die Rechnungen verglichen werden sollen ( $I \approx 2 \cdot 10^3$  A,  $B = 1 - 4$  Tesla,  $p_A \approx 10^3$  N/m<sup>2</sup>), in der Größenordnung von  $10^{-2}$  Tesla. Wir setzen also für  $\mathbf{B}$  an:  $\mathbf{B}(0, 0, B_0)$ .

e) Vom Bogenrand zur Achse hin steigt der Druck im Plasma an. Dieser Effekt, der durch die ambipolare Diffusion und durch den Nernst-Effekt (Thermokraft proportional zu  $\nabla T \times \mathbf{B}$ ) verursacht wird, läßt sich für ein zylindersymmetrisches Plasma leicht berechnen<sup>8,9</sup>. Die Druckerhöhung hängt vom Außendruck  $p_A$ , vom Magnetfeld und von der Temperatur ab. Im vollionisierten Wasserstoff gilt:  $p \propto T^{3/4}$ . Im rotationssymmetrischen Plasma endlicher Länge mit axialen Gradienten der Temperatur entstehen zunächst Druckunterschiede längs der Entladung. Da jedoch der Bogen in unserem Fall an den Enden durch massive Elektroden begrenzt wird,

<sup>6</sup> E. H. HOLT u. R. E. HASKELL, Foundations of Plasma Dynamics, The Macmillan Company, New York; Collier Macmillan Ltd., London 1965.

<sup>7</sup> S. I. BRAGINSKY, in: M. A. LEONTOVICH, Reviews of Plasma Physics, Consultants Bureau, New York 1967, Band I.

<sup>8</sup> R. WIENECKE, Z. Naturforsch. **18a**, 1151 [1963].

<sup>9</sup> J. RAEDER u. S. WIRTZ, Z. Naturforsch. **23a**, 1965 [1968].

auf denen sich der Druck „abstützen“ kann, wird der Druckausgleich parallel zu  $\mathbf{B}$  zu einer Druckverteilung führen, die nicht von  $z$  abhängt. In guter Näherung wird das radiale Druckprofil vorliegen, welches die Theorie des zylindersymmetrischen Falles für den Querschnitt mit der höchsten Achsentemperatur ergibt. Bei der Berechnung der Potentialverteilung kann diese Tatsache leicht berücksichtigt werden, da für alle vorkommenden Transportkoeffizienten Formeln vorliegen, die von  $p$  und  $T$  abhängen. Zur Bestimmung der Temperaturverteilung werden dagegen die Wärmeleitungskoeffizienten  $\kappa_{||}$  und  $\kappa_{\perp}$  im teilweise ionisierten Plasma aus Tabellen entnommen, die von verschiedenen Autoren berechnet wurden (s. Abschnitt 2.3). Die Eingabe dieser Werte in Abhängigkeit von  $p$  und  $T$  hätte einen großen numerischen Aufwand erfordert, der sich kaum gelohnt hätte, da das Temperaturprofil nur unmittelbar vor den Elektroden wesentlich von der Zylindersymmetrie abweicht, sonst längs des Bogens aber sehr flach verläuft. Außerdem liegt die Annahme von Zylindersymmetrie schon den Berechnungen von  $\kappa_{\perp}$  im teilweise ionisierten Plasma zugrunde. Wir nehmen deshalb an, daß lokal der in <sup>9</sup> berechnete Zusammenhang zwischen  $p$  und  $T$  vorliegt. Mit dieser einfachen Annahme werden die  $\kappa$  zu reinen Funktionen der Temperatur.

f) In den hier behandelten Lichtbögen treten radiale, azimutale und axiale Strömungen auf. Die axiale Schwerpunktsbewegung hat zwei Ursachen: die axiale Zufuhr des Bogengases an der Kathode (z. B. im Experiment von ZANKL<sup>2</sup>) und die  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kräfte, die aus der Wechselwirkung radialer Komponenten der Stromdichte in Kathodennähe mit dem azimutalen Magnetfeld des Bogenstromes resultieren. Da sich der Gasstrom vor der großen, massiven Anode staut, wird die von der Kathode kommende Strömung längs der Bogenachse allmählich radial nach außen umgelenkt. Außerhalb des heißen Bogenkerns wird ein Teil des Gases zur Kathode zurückströmen und so einen geschlossenen Wirbel bilden, während der Rest axial aus dem Bogengefäß abgepumpt wird.

Die Rotation der Bogensäule wird durch die Wechselwirkung radialer Stromkomponenten mit dem axialen Magnetfeld angetrieben. Die bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse für Bögen mit massiven Elektroden zeigen die schnellste Rotation vor der Kathode und einen starken Abfall dieser Bewegung zur Anode hin<sup>2</sup>.

Prinzipiell könnten wir diese Strömungen und ihre Wechselwirkungen mit den Verteilungen von Temperatur und Potential berechnen, wenn wir unsere Grundgleichungen durch die Impulsbilanz des Plasmas (mit viskosen Kräften) ergänzen würden. Praktisch werden wir dieses äußerst schwierige Problem nicht angreifen, sondern uns darauf beschränken, den Einfluß vorgegebener Verteilungen von  $v_r$  und  $v_{\varphi}$  numerisch zu studieren.

Die axiale Geschwindigkeit  $v_z$  werden wir allerdings immer vernachlässigen. Sie kann die Potentialverteilung nicht direkt beeinflussen, da sie parallel zum Magnetfeld gerichtet ist. Der Einfluß auf die Energiebilanz erscheint uns zu kompliziert, um eine Untersuchung mit einer aufgeprägten Strömung zu ermöglichen. Die Divergenz des konvektiven Energietransports längs der Achse entsteht durch die radiale Ausströmung und durch axiale Temperaturgradienten. Diese sind allerdings nur kurz vor den Elektroden groß, während das axiale Temperaturprofil über den größten Teil des Bogens sehr flach ist. Sicher trägt die axiale Strömung merklich zu den Energieverlusten der Entladung bei, quantitative Aussagen kann man aber wohl nur durch eine mit den übrigen Plasmagleichungen konsistenten Berechnung des Strömungsfeldes erwarten.

### 2.3. Verwendete Materialfunktionen

Der Term  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  in der Energiebilanz beschreibt die Energieverluste eines Volumelementes durch Wärmeleitung. Wegen der Rotationssymmetrie tragen nur die Wärmeströme in axialer und radialer Richtung zum Energietransport bei. Radial wird Wärme durch Kontaktwärmeleitung, normale Diffusion (mit Berücksichtigung der Reaktionsenergie bei Dissoziation und Ionisation), Thermodiffusion und den elektrischen Strom transportiert. In einem zylindersymmetrischen Plasma verschwindet die radiale Stromdichte  $j_r$ . In diesem Fall lassen sich die restlichen Effekte in einer Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_{\perp}$  zusammenfassen, die für gegebene Werte von  $B$  und  $p_A$  nur von der Temperatur abhängt<sup>9</sup>. Wir verwenden  $\kappa_{\perp}$  auch für das rotationssymmetrische Plasma endlicher Länge (s. 2.2, Annahme e), d. h. wir vernachlässigen den Wärmetransport durch  $j_r$ . Damit ergibt sich:

$$q_r = -\kappa_{\perp}(T) \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4)$$

In axialer Richtung berücksichtigen wir den Beitrag des elektrischen Stromes zum Wärmetransport<sup>7</sup>:

$$q_z = -\alpha(T) j_z - \kappa_{||}(T) \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (5)$$

Da bei unseren Rechnungen Temperaturen in dem weiten Bereich zwischen der Wandtemperatur  $T_w = 10^3$  °K und Achsentemperaturen von der Größenordnung  $10^5$  °K auftreten, müssen wir für die Transportkoeffizienten die Ergebnisse verschiedener Autoren verwenden.

Bei Temperaturen unter  $6 \cdot 10^3$  °K verwenden wir für  $\kappa_{||}$  die von GRIER<sup>10</sup> berechneten Werte. Diese Rechnungen gelten unter der Annahme, daß der Wasserstoff noch nicht ionisiert ist, eine Annahme, die auch bei unseren Werten für den Außendruck  $p_A$  gut erfüllt ist. In diesem Temperaturbereich tritt wegen des Transportes von Dissoziationsenergie ein ausgeprägtes Maximum von  $\kappa_{||}$  auf, das wesentlich zu den Energieverlusten des Bogens beiträgt. Für Temperaturen zwischen  $6 \cdot 10^3$  °K und  $1,7 \cdot 10^4$  °K werden Werte für  $\kappa_{||}$  verwendet, die von GRIER<sup>11</sup> unter der Annahme berechnet wurden, daß der Wasserstoff völlig dissoziiert ist. Die Ergebnisse der Rechnungen von Grier liegen in Form von Tabellen vor, die für verschiedene Werte von  $p$  den Koeffizienten  $\kappa_{||}$  als Funktion von  $T$  angeben. Wegen der Annahme e) in Abschnitt 2.2 hängt  $p$  eindeutig von  $T$  ab. Die den jeweiligen Paaren von  $p$  und  $T$  entsprechenden Werte von  $\kappa_{||}$  werden mit den Tabellen durch lineare Interpolation berechnet.

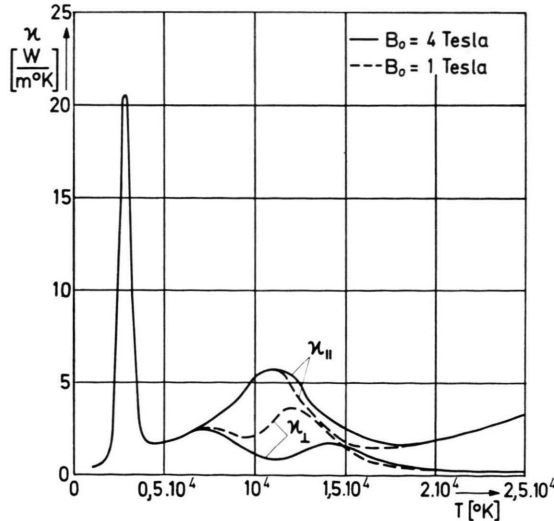


Abb. 1. Die Wärmeleitfähigkeiten  $\kappa_{||}$  und  $\kappa_{\perp}$  für  $B_0 = 1$  und 4 Tesla bei  $p_A = 10^3$  N/m<sup>2</sup> als Funktion der Temperatur.

Für Temperaturen über  $1,7 \cdot 10^4$  °K wird zur Berechnung von  $\kappa_{||}$  die von Braginsky angegebene Formel für vollionisierten Wasserstoff verwendet<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \kappa_{||} &= \kappa_{||\text{Elektr.}} + \kappa_{||\text{Ionen}} \\ &= 1,897 \cdot 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\ln \lambda} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}} \right] (T \text{ in } ^\circ\text{K}). \end{aligned} \quad (6)$$

Für niedrige Temperaturen ( $T < 6 \cdot 10^3$  °K), bei denen die Ionisation vernachlässigbar ist, wird die Wärmeleitfähigkeit nicht vom Magnetfeld beeinflusst. Deshalb stimmt  $\kappa_{\perp}$  mit  $\kappa_{||}$  überein. Für Temperaturen über  $6 \cdot 10^3$  °K verwenden wir die in<sup>9</sup> berechneten Werte. Die Abb. 1 zeigt  $\kappa_{||}$  und  $\kappa_{\perp}$  ( $B_0 = 1$  und 4 Tesla bei  $p_A = 10^3$  N/m<sup>2</sup>) als Funktionen der Temperatur.

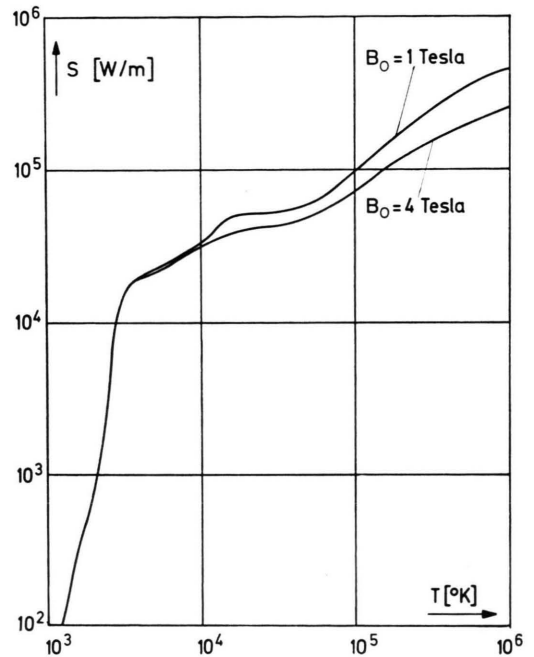


Abb. 2. Das Wärmestrompotential  $S(T)$  (definiert durch  $\kappa_{||}$ ) für  $B_0 = 1$  und 4 Tesla bei  $p_A = 10^3$  N/m<sup>2</sup>.

Da uns keine Berechnungen von  $\alpha$  im teilweise ionisierten Wasserstoff bekannt sind, verwenden wir im ganzen Temperaturbereich die von Braginsky angegebene Formel für vollionisierten Wasserstoff:

$$\alpha = 0,6 \cdot 10^{-4} T \text{ [W/A]}, (T \text{ in } ^\circ\text{K}). \quad (7)$$

Für Temperaturen oberhalb von  $10^4$  °K ist diese Näherung brauchbar. In diesem Bereich dominieren die Stöße zwischen Elektronen und Ionen, weil der Querschnitt für Elektron-Neutralteilchenstöße wesentlich kleiner ist als der Coulomb-Querschnitt. Wenn

<sup>10</sup> N. T. GRIER, Calculation of Transport Properties and Heat Transfer Parameters of Dissociating Hydrogen, NASA TN D 14 06.

<sup>11</sup> N. T. GRIER, Calculation of Transport Properties of Ionizing Atomic Hydrogen, NASA TN D 31 86.



die Temperatur unter  $10^4$  °K sinkt, besitzt der so berechnete Koeffizient  $\alpha$  einen großen Fehler. Dieser spielt aber keine Rolle, da so niedrige Temperaturen nur in den Randzonen des Bogens auftreten; dort aber sind die axialen Ströme zu gering, um einen wesentlichen Wärmetransport verursachen zu können.

Im Abschnitt 3 wird das Wärmestrompotential  $S$  verwendet, das durch die Gleichung

$$S(T) = \int_{T_0}^T \kappa_{\perp}(T) dT \quad (8)$$

definiert wird. Für  $T_0$  wählen wir die Temperatur der Kesselwand, auf der  $S$  deshalb verschwindet. Die Abb. 2 zeigt  $S(T)$  für  $B_0 = 1$  und 4 Tesla bei  $p_A = 10^3$  N/m<sup>2</sup>.

### 3. Die Differentialgleichungen für das Wärmestrompotential $S$ und für das elektrische Potential $\Phi$

#### 3.1. Aufstellung der Differentialgleichung für $S$

Im stationären Fall reduziert sich die Energiegleichung (1) auf:

$$\nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u} \mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^{\times}. \quad (9)$$

Wegen der Rotationssymmetrie hängt die Temperatur  $T$  nur von  $r$  und  $z$  ab. Aus den Gln. (4), (5) und (9) folgt für  $T$  die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \kappa_{\perp}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \kappa_{\parallel}(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = Q_H + Q_J + Q_S. \quad (10)$$

mit den Quelltermen

$$Q_H = -j_r(E_r + v_{\varphi} B_0) + j_{\varphi} v_r B_0 - j_z E_z, \quad (11 a)$$

$$Q_J = \frac{\partial}{\partial z} [\alpha(T) j_z], \quad (11 b)$$

$$Q_S = \frac{\partial}{\partial z} (u v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u v_r) + p \frac{\partial v_z}{\partial z} + p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r). \quad (11 c)$$

Bei den Experimenten, welche diese Untersuchung angeregt haben, ist die Bogenlänge wesentlich größer als der Bogenradius. Deshalb sind die axialen Gradienten der Temperatur fast im ganzen Bogen wesentlich kleiner als die radialen. Trotz der

großen Unterschiede zwischen  $\kappa_{\parallel}$  und  $\kappa_{\perp}$  dominieren daher die radialen Wärmeverluste. Wir wollen deshalb den zweiten Term auf der linken Seite von Gleichung (10) als eine kleine Korrektur auffassen. Den ersten Summanden, der die Energiebilanz beherrscht, linearisieren wir durch Verwendung des Wärmestrompotentials nach Gl. (8). Damit erhalten wir für  $S$  die quasilineare, elliptische Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{\perp} \frac{\partial S}{\partial z} \right) = Q_H + Q_J + Q_S. \quad (12)$$

#### 3.2. Die Differentialgleichung für $\Phi$

Zur Berechnung von  $\Phi$  verwenden wir die in <sup>5</sup> aufgestellte partielle Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = Q_p - Q_v + Q_T \quad (13)$$

mit den Quelltermen:

$$Q_p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\sigma_2}{e n_e} \frac{\partial p_e}{\partial r} \right), \quad (14 a)$$

$$Q_v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r B_0 (\sigma_2 v_{\varphi} - \sigma_3 v_r)], \quad (14 b)$$

$$Q_T = \frac{\partial}{\partial z} \left( \beta_1 \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \beta_2 \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (14 c)$$

Die Gleichungen für  $S$  und  $\Phi$  sind durch die Temperaturabhängigkeit der Transportkoeffizienten  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  und durch die Quellterme miteinander gekoppelt. Diese Zusammenhänge sind so kompliziert, daß nur eine numerische Lösung Erfolg verspricht.

## 4. Numerische Lösung

Zur numerischen Berechnung der Verteilungen von  $S$  und  $\Phi$  verwenden wir ein einfaches Modell des Bogens, das wir im folgenden zusammen mit den Randbedingungen für  $S$  beschreiben wollen.

#### 4.1. Geometrische Anordnung und Randbedingungen

Die Elektroden des Bogens werden zu ebenen Kreisscheiben idealisiert, die wie beim Experiment verschiedene Durchmesser besitzen können. Die Anordnung wird von einem isolierenden Zylinder mit dem Radius  $r_w$  umschlossen (Abb. 3).

Die Randbedingungen für  $S$  lauten:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial S}{\partial r} = 0 & \text{für } r = 0, \quad 0 \leq z \leq L, \\
S = 0 \quad (\cong T_w = 10^3 \text{ }^\circ\text{K}) & \text{für } r = r_w, \quad 0 \leq z \leq L, \\
S = S_E \quad (\cong T_E = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}) & \text{für } r \leq r_A, \quad z = 0, \\
S = S_E \quad (\cong T_E = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}) & \text{für } r \leq r_K, \quad z = L, \\
S = 0 \quad (\cong T_w = 10^3 \text{ }^\circ\text{K}) & \text{für } r_A < r < r_w, \quad z = 0, \\
S = 0 \quad (\cong T_w = 10^3 \text{ }^\circ\text{K}) & \text{für } r_K < r < r_w, \quad z = L.
\end{array}$$

Die Wahl der Temperaturen  $T_E$  und  $T_w$  ist bis zu einem gewissen Maß unkritisch. Der von uns gewählte Wert  $T_E$  soll als Temperatur kurz vor den Elektroden verstanden werden. Die Erfahrung bei den Rechnungen hat gezeigt, daß sich die Temperaturen in der Bogensäule praktisch nicht ändern, wenn  $T_E$  zwischen  $10^3 \text{ }^\circ\text{K}$  und  $2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$  variiert. Würde man die Schmelztemperatur von Wolfram für  $T_E$  wählen, so wäre das wohl auch nicht realistischer als  $T_E = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ , da vor Kathode und Anode ohnehin schmale Bereiche liegen, die von den Emissionsmechanismen beherrscht werden.

Die Wahl der Temperatur  $T_w$  ist unkritisch bis auf eine Bedingung. Sie muß unterhalb der Temperatur liegen, bei der die Wärmeleitfähigkeit das Dissoziationsmaximum durchläuft ( $2,5 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ ). Die entsprechenden Randbedingungen für  $\Phi$  in der geometrischen Anordnung nach Abb. 3 sind in <sup>5</sup> zusammengefaßt.

Die in Abb. 3 gezeigte Anordnung wird durch ein Gitter mit den Maschenweiten  $\Delta z$  und  $\Delta r$  unterteilt, in dessen Knotenpunkten die Werte von  $\Phi$  und  $S$  numerisch berechnet werden sollen. Da die Bestimmung von  $\Phi$  für ein gegebenes Temperaturprofil (damit ist auch das  $S$ -Profil bekannt) in <sup>5</sup> schon ausführlich dargestellt wurde, werden wir im folgenden nur noch die Berechnung von  $S$  für eine gegebene Potentialverteilung beschreiben und dann zur simultanen Lösung der Gleichungen für  $\Phi$  und  $S$  übergehen.

#### 4.2. Aufstellung der Differenzengleichungen für $S$

Das in Abb. 3 dargestellte Gitter unterteilt den Bogenraum in ringförmige Volumelemente. Wir erhalten direkt ein diskretes, mathematisches Modell für den Erhaltungssatz der inneren Energie, wenn wir die Gl. (12) mit Hilfe des Gaußschen Satzes jeweils über ein Volumelement integrieren. Da wir ein feines Gitter wählen wollen, setzen wir die  $x$ ,  $\alpha$  und die Komponenten von  $\nabla S$  und  $\mathbf{j}$  bei der Integration konstant und gleich ihren Werten in der Mitte der entsprechenden Oberflächenelemente. Die räumlichen

Ableitungen von  $S$  approximieren wir durch zentrale Differenzenformeln zweiter Ordnung.

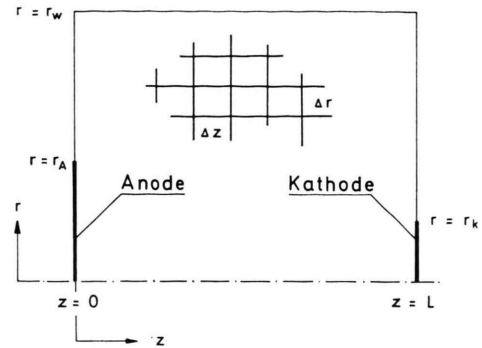


Abb. 3. Zur numerischen Lösung. Geometrische Anordnung.

Die Integration der Ohmschen Heizung ersetzen wir durch das Produkt des Wertes von  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times$  im Zentrum des Volumelementes mit dessen Rauminhalt. So entsteht ein System algebraischer Gleichungen, dessen Koeffizienten von  $S$  abhängen, da wir von einer quasilinearen Differentialgleichung ausgegangen sind.

Diese Gleichungen werden iterativ mit einem Relaxationsverfahren gelöst. Dabei gehen wir von einer ersten Näherung für die  $S$ -Verteilung aus, die uns auf Grund experimenteller Ergebnisse plausibel erscheint.

#### 4.3. Der Einfluß des Relaxationsfaktors

Wegen der Nichtlinearität der Gleichungen ist es nicht sicher, daß der Iterationsprozeß gegen die Lösung konvergiert. Der Erfolg des Verfahrens hängt von der Güte der Anfangsnäherung und von der Größe des Relaxationsfaktors  $\omega$  ab ( $0 < \omega < 2$ ). Durch günstige Wahl von  $\omega$  können wir die Geschwindigkeit der Konvergenz optimieren. Im Prinzip kann man den entsprechenden Wert von  $\omega$  theoretisch berechnen, da er eindeutig von der Koeffizientenmatrix festgelegt wird<sup>12</sup>. In unserem Fall hängen aber die Koeffizienten von der Lösung ab,

<sup>12</sup> R. S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs 1962.

so daß sich die Matrix und damit der optimale Relaxationsfaktor von Iteration zu Iteration ändern würde. Deswegen haben wir ein „mittleres“  $\omega$  für eine gegebene Potentialverteilung „experimentell“ bestimmt. Als Beispiel ist in Abb. 4 die Zahl der

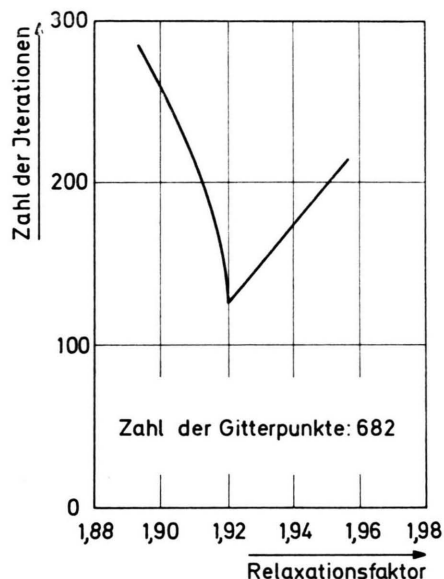


Abb. 4. Anzahl der zur Konvergenz notwendigen Iterationen abhängig vom Relaxationsfaktor  $\omega$ .

zur Konvergenz nötigen Iterationen über  $\omega$  aufgetragen (Anzahl der Gitterpunkte = 682). Die Kurve zeigt das von der Theorie geforderte markante Minimum in der Zahl der notwendigen Iterationen. Verwendet man ein feineres Gitter, so ändert sich natür-

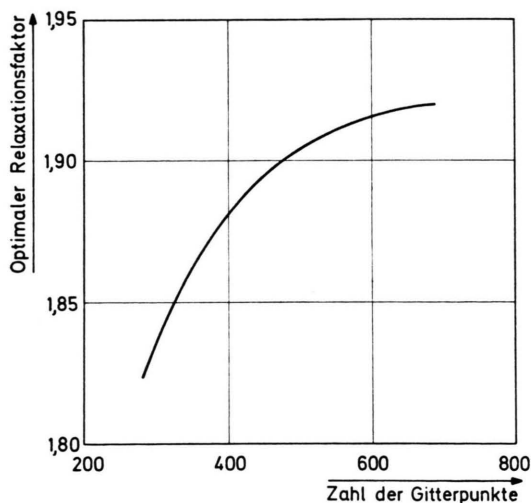


Abb. 5. Abhängigkeit des optimalen Relaxationsfaktors von der Anzahl der Gitterpunkte.

lich auch der optimale Wert von  $\omega$ . Ein Beispiel für diesen Zusammenhang zeigt die Abb. 5.

#### 4.4. Gemeinsame Iteration der Verteilungen von $\Phi$ und $S$

Bisher haben wir nur kurz die Berechnung von  $S$  für den Fall skizziert, daß die Verteilung von  $\Phi$  bekannt ist. Tatsächlich müssen wir aber eine konsistente Lösung der beiden gekoppelten Gleichungen für  $\Phi$  und  $S$  finden. Dazu verwenden wir das folgende Schema. Wir gehen von einer ersten Näherung für das  $S$ -Profil aus und berechnen iterativ die zugehörige Potentialverteilung für einen gegebenen Strom. Dieser Prozeß konvergiert immer, da  $\Phi$  einem linearen Gleichungssystem genügt.

Aus dieser Lösung berechnen wir die Komponenten des elektrischen Feldes und – unter Verwendung der ersten Näherung für  $S$  – die Komponenten der elektrischen Stromdichte. Nun kennen wir in erster Näherung alle elektrischen Terme ( $j_z$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times$ ), die wir zur Bestimmung der  $S$ -Verteilung benötigen. Deren Berechnung führen wir iterativ in der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Weise aus. Wir warten jedoch nicht die vollständige Konvergenz des Prozesses ab, sondern begnügen uns mit einer Näherungslösung für  $S$ . Diese setzen wir wiederum in die Potentialgleichung ein und führen das beschriebene Schema zyklisch durch, bis wir konsistente Verteilungen von  $S$  und  $\Phi$  erhalten.

Die Erfahrung bei den Rechnungen hat gezeigt, daß unser Iterationsschema zur Divergenz führt, wenn wir die Bestimmung von  $S$  für eine gegebene  $\Phi$ -Verteilung immer bis zur Konvergenz durchführen. Dieses Verhalten erscheint uns plausibel, wie wir an folgendem Beispiel zeigen wollen. Wird an einer Stelle des Gitters der Wert von  $S$  zu hoch, so kann das zur Divergenz führen, da die Konvergenz wegen der Nichtlinearität nicht gesichert ist. Gehen wir dagegen mit dem zu großen Wert von  $S$  rechtzeitig zur Potentialberechnung zurück, so sinkt an eben dieser Gitterstelle das elektrische Feld und damit  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^\times$  ab, da der Gesamtstrom konstant gehalten wird. Die Verwendung der lokal verminderten Ohmschen Heizung in der Gleichung für  $S$  sorgt dann für die Stabilisierung der Rechnung. Insgesamt gesehen koppeln wir die zur Divergenz neigende Lösung der nichtlinearen Energiegleichung eng an die gesicherte Berechnung der Potentialverteilung an. Das Ausmaß dieser Kopplung kann man durch die

jeweilige Anzahl von Iterationen der  $S$ -Verteilung einstellen.

Im allgemeinen verwenden wir verschiedene Relaxationsfaktoren  $\omega_S$  und  $\omega_\Phi$  bei der Berechnung von  $S$  und  $\Phi$ .

Bei der gekoppelten Iteration verwenden wir für  $\omega_S$  einen Wert, der kleiner ist als der optimale Wert, den wir bei der einmaligen Bestimmung von  $S$  für ein gegebenes Potentialprofil gefunden haben (Abschnitt 4.3). Es zeigt sich, daß zwischen den Werten von  $\omega_S$ , die noch zu beschleunigter Konvergenz führen und denen, die das Schema schon divergieren lassen, nur ein sehr schmaler Bereich liegt.

Da sich diese Grenze während der Rechnung wegen der Nichtlinearität in unübersichtlicher Weise verschiebt, verwenden wir immer ein  $\omega_S$  auf der sicheren Seite.

## 5. Ergebnisse

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Frage nach den Parametern, die den Durchmesser der Bogensäule bestimmen. Zunächst wollen wir dieses Problem für einen Bogen ohne Schwerpunktsströmungen systematisch untersuchen. Dabei lehnen wir uns in der Wahl der geometrischen und elektrischen Daten an Experimente an, die von ZANKL durchgeführt wurden<sup>2</sup>.

### 5.1. Der Einfluß der geometrischen Parameter und des Magnetfeldes auf die Temperaturverteilung im strömungsfreien Bogen

Für den Standardfall, von dem wir bei allen Änderungen ausgehen werden, geben wir uns folgende Werte vor:

$$\begin{aligned} I &= 2140 \text{ A}, & r_w &= 3 \text{ cm}, \\ B_0 &= 4 \text{ Tesla}, & L &= 40 \text{ cm}, \\ r_K &= 0,75 \text{ cm}, & p_A &= 10^3 \text{ N/m}^2 = 7,6 \text{ Torr}, \\ r_A &= 2,25 \text{ cm}, \end{aligned}$$

Die Abb. 6 zeigt ein radiales Temperaturprofil in der Mitte zwischen den Elektroden ( $z=L/2$ ) für diesen Parametersatz und Meßergebnisse nach ZANKL<sup>2</sup>. Die deutlichen Unterschiede zwischen Experiment und Theorie zeigen, daß unser einfaches Modell den Bogen nur grob beschreiben kann. Wir werden auf die Ursachen für dieses Verhalten später noch etwas genauer eingehen, wollen vorerst aber bei unseren einfachen Annahmen bleiben.

Zunächst untersuchen wir den Einfluß der Bogenlänge  $L$ , während die übrigen Parameter festgehalten

werden. Bei allen Rechnungen dieses Abschnitts werden wir den Stromtransport durch  $\nabla_{\parallel} T$  und den Wärmetransport durch  $\mathbf{j}_{\parallel}$  vernachlässigen [ $\beta_1 = 0$  in Gl. (14c) bzw.  $\alpha = 0$  in Gl. (5)], da sich gezeigt hat, daß die Berücksichtigung der beiden Effekte die radialen Temperaturprofile in der Bogenmitte kaum ändert.

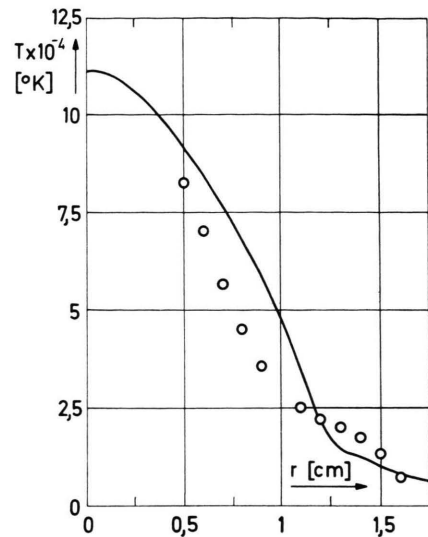


Abb. 6. Vergleich eines berechneten radialen Temperaturprofils (durchgezogene Kurve) mit Meßwerten von Zankl.

Bei Achsentemperaturen von etwa  $10^5$  °K sind diese Transportvorgänge noch nicht sehr wichtig. Eine Ausnahme bildet der kürzeste Bogen ( $L=10$  cm), bei dem das axiale Temperaturprofil auch in der Mitte zwischen den Elektroden noch merkliche Temperaturgradienten besitzt. Eine Kontrollrechnung mit Berücksichtigung von  $\beta_1$  und  $\alpha$  ergibt, daß der maximale Fehler in der Achse auftritt (10%), während die Randzonen praktisch nicht beeinflusst werden.

Die Abb. 7 zeigt radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$ . Parameter der Kurvenschar ist der Elektrodenabstand  $L$ . Man erkennt, daß die Achsentemperatur  $T_A$  zunächst mit  $L$  wächst, dann ein Maximum durchläuft und schließlich absinkt. Der sich daraus ergebende Verlauf  $T_A(L)$  ist in der Abb. 8 aufgezeichnet (unter Verwendung von Rechnungen für  $L=5$  cm und  $L=40$  cm). Die Ursache dieses Verhaltens liegt in der Wechselwirkung von Ohmscher Heizung und Endverlusten, die sich beide mit der Länge ändern.

Das radiale Profil der elektrischen Feldstärke  $E_z$  wird mit wachsendem  $L$  breiter<sup>5</sup>. Da der Strom  $I$



konstant gehalten wird, sinken die Werte von  $E_z$  und  $j_z$ , was zu einer Verringerung der Ohmschen Heizung und damit von  $T_A$  führt. Die gleichzeitige Abnahme der Endverluste spielt bei größerem  $L$  keine Rolle mehr, da das axiale Temperaturprofil schon sehr flach verläuft. Wird dagegen der Bogen sehr kurz, so führen die steilen Temperaturgradienten zu hohen axialen Energieverlusten durch Wärmeleitung. Die optimale Länge, im Sinne hoher Achsentemperatur, wird durch diese beiden gegenläufigen Phänomene festgelegt.

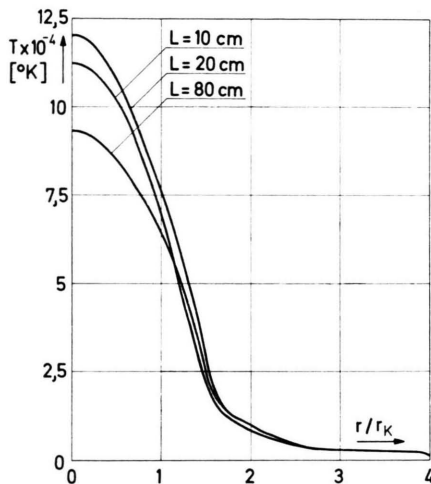


Abb. 7. Radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für verschiedene Bogenlängen  $L$ .

Während die Variation von  $L$  gezeigt hat, daß es eine optimale Länge des Bogens gibt, erwarten wir eine monotone Änderung von  $T_A$  mit dem Kathodenradius  $r_K$ . Die Ursache ist die Konzentration der

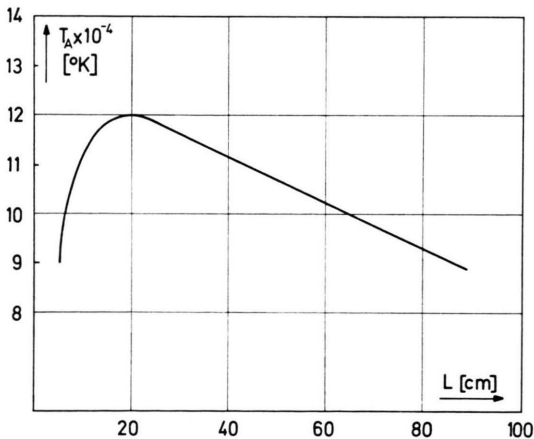


Abb. 8. Die Achsentemperatur  $T_A$  bei  $z=L/2$  abhängig von der Bogenlänge  $L$ .

axialen elektrischen Feldstärke auf die magnetische Flußröhre, welche gerade die kleinere Elektrode umschließt. In unserem Fall ist das die Kathode. Bei konstantem Strom muß deshalb eine Verkleinerung von  $r_K$  zu einer Vergrößerung der axialen Stromdichte und damit zu höheren Temperaturen führen. Zur Demonstration dieses Effektes variieren wir von unserem Parametersatz nur  $r_K$  ( $r_K = 0,6$  cm,  $0,75$  cm,  $0,9$  cm).

Die Abb. 9 zeigt die entsprechenden Temperaturprofile bei  $z=L/2$ . Man erkennt, daß  $T_A$  sich wesentlich erhöht, je kleiner man  $r_K$  wählt. Grob gesagt verhalten sich die Werte von  $T_A$  umgekehrt proportional zum Quadrat der entsprechenden Kathodenradien. Dieser Verlauf war etwa zu erwarten, da der Radius des stromführenden Kanals quadratisch in die Berechnung der mittleren Stromdichte eingeht.

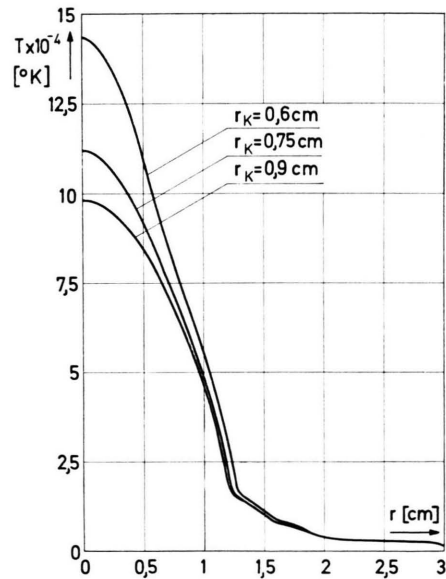


Abb. 9. Radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für verschiedene Kathodenradien  $r_K$ .

Als letzten geometrischen Parameter wollen wir den Kesselradius  $r_w$  variieren. Die Abb. 10 zeigt zwei radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für  $r_w = 3$  cm und  $r_w = 6$  cm. Diese Vergrößerung des Wandradius um den Faktor 2 führt zu einer Verbreiterung des Temperaturprofils von nur etwa 25% und läßt  $T_A$  um 4% ansteigen. Dieses Verhalten beweist, daß der Bogen im wesentlichen von den Elektroden stabilisiert wird. Der Radius der Wand, auf der eine Temperatur vorgeschrieben ist, spielt hier keineswegs die dominierende Rolle wie in der

Theorie zylindersymmetrischer Lichtbögen, sondern er übt nur einen geringen Einfluß auf den Bogenkern aus.

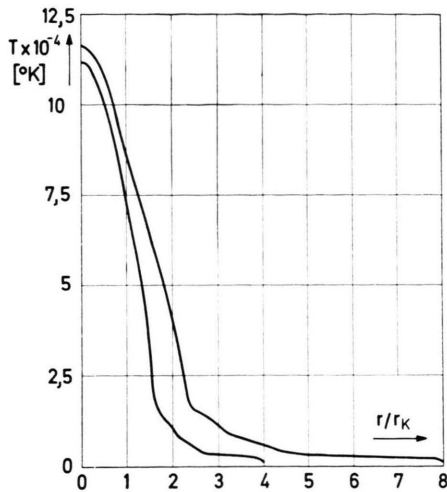


Abb. 10. Radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für zwei verschiedene Radien  $r_w$  der Kesselwand.

Außer von den geometrischen Parametern werden die Achsentemperaturen im Lichtbogen auch von der Stärke des Magnetfeldes abhängen. Die Vergrößerung von  $B_0$  reduziert die radialen Wärmeleitungsverluste und führt gleichzeitig zu einer stärkeren Konzentration von  $E_z$ . Beide Einflüsse wirken im Sinn einer Temperaturerhöhung. In Abb. 11 sind radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  dargestellt.

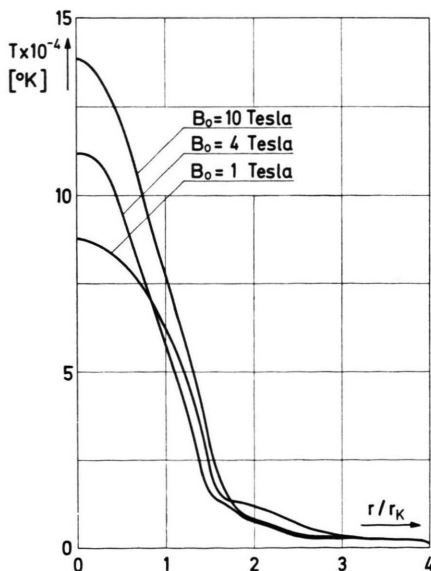


Abb. 11. Radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für verschiedene Werte der magnetischen Induktion  $B_0$ .

Man erkennt einen relativ geringen Einfluß von  $B_0$  auf die Temperaturverteilung. Erhöht man  $B_0$  um einen Faktor 10, so steigt  $T_A$  nur von  $8,75 \cdot 10^4$  auf  $1,38 \cdot 10^5$  °K an. Die schwache Wirkung einer Vergrößerung von  $B_0$  hat ihre Ursache in der gleichzeitigen Zunahme des Druckes in der Entladung. Damit werden die Stoßzeiten der Elektronen gegen Atome und Ionen kleiner, was die Vergrößerung des Hall-Parameters  $\omega_e \tau_e$  durch die Erhöhung von  $B_0$  teilweise wieder aufhebt. Der Hall-Parameter wächst also nicht proportional zu  $B_0$ , sondern wesentlich schwächer. Da die Konzentration von  $E_z$  und die Reduzierung von  $\kappa_{\perp}$  gerade durch  $\omega_e \tau_e$  bestimmt werden, ergibt sich der berechnete geringe Effekt.

### 5.2. Der Einfluß der Rotation des Bogens

Wir haben schon am Beginn von Abschnitt 5.1 auf die Unterschiede zwischen den Ergebnissen unserer Rechnungen und dem Experiment hingewiesen. Diese Differenzen drücken sich in den radialen Profilen von  $E_z$  noch deutlicher aus als in den Temperaturverteilungen. Theoretisch zeigt der Verlauf von  $E_z$  im Außenbereich des Bogens eine Schulter, die dem Minimum von  $\omega_e \tau_e$  bei etwa  $1,6 \cdot 10^4$  °K entspricht<sup>5</sup>, während Messungen einen steilen Abfall von  $E_z$  (ohne Schulter) im Außenbereich des Bogens ergeben<sup>2, 13</sup>. Das  $E_z$ -Profil nach<sup>13</sup> ist in Abb. 12 dar-

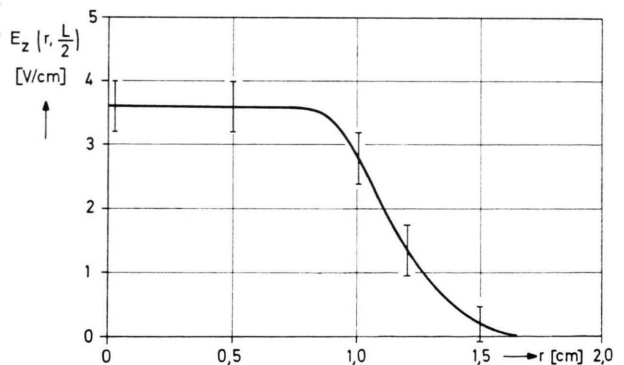


Abb. 12. Radiales Profil von  $E_z$  bei  $z=L/2$  nach Messungen von SCHWENN.

gestellt, das theoretische Profil zeigt die Abb. 14 (Kurve für  $v_{\varphi} = 0$ ). Die folgenden numerischen Untersuchungen zur Klärung dieser Diskrepanz wollen

<sup>13</sup> J. RAEDER, R. SCHWENN, S. WIRTZ u. G. ZANKL, The Radial Distribution of the Axial Electric Field in a Hydrogen Arc in a Strong Axial Magnetic Field. Ninth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Bucharest 1969.

wir an einem Bogen vornehmen, der durch folgende Parameter charakterisiert wird:

$$\begin{aligned} I &= 1800 \text{ A}, & B_0 &= 1 \text{ Tesla}, & r_K &= 1 \text{ cm}, \\ r_A &= 1,6 \text{ cm}, & r_w &= 6 \text{ cm}, & L &= 14 \text{ cm}, \\ p_A &= 10^3 \text{ N/m}^2 = 7,6 \text{ Torr}. \end{aligned}$$

Diese Daten entsprechen praktisch dem Bogen, an dem das  $E_z$ -Profil in <sup>13</sup> gemessen wurde.

Bisher haben wir einen Bogen ohne Strömungen vorausgesetzt. Wir wollen nun diese Einschränkung aufgeben und eine Rotation der Plasmasäule zulassen, auf deren Wichtigkeit KLÜBER <sup>14</sup> hingewiesen hat. Im  $E_z$ -Profil kann die Schulter verschwinden, wenn man über die räumliche Verteilung der Rotationsgeschwindigkeit  $v_\varphi$  folgende Voraussetzungen macht:

- Die Rotation ist so gerichtet, daß die resultierende  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -EMK ( $v_\varphi \cdot B_z$ ) radialen Strömen entgegenwirkt.
- Die Rotation ist unmittelbar vor der Kathode am schnellsten.
- In radialer Richtung nimmt  $v_\varphi$  jeweils sein Maximum etwa beim Radius der Kathode an.

Eine solche Verteilung von  $v_\varphi$  kann im Bogen auftreten, da die radialen Stromkomponenten vor den Elektroden zusammen mit dem Magnetfeld zu  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kräften führen, die eine entsprechende Rotation antreiben.

Die radialen Stromkomponenten vor der Anode sind in unserer Geometrie viel kleiner als vor der Kathode. Hier muß sich der Bogen am stärksten kontrahieren, da die Kathode wesentlich dünner ist als die Anode. In die gleiche Richtung wirkt die Kontraktion des kathodischen Stromansatzes auf einen Brennfleck. Deshalb wird vor der Kathode die stärkste Rotation auftreten. Das radiale Maximum von  $v_\varphi$  wird etwa dort liegen, wo die radialen Stromkomponenten  $j_r$  am größten sind, d. h. am Rand der Kathode. Zur Anode hin wird die Rotation langsamer, da  $j_r$  abnimmt. In der Umgebung der Anode muß sich die Richtung von  $v_\varphi$  umkehren, da dort  $j_r$  sein Vorzeichen wechselt. Die Beträge von  $v_\varphi$  werden hier wegen der kleineren  $j_r$  wesentlich geringer sein als vor der Kathode. Der beschriebene Mechanismus führt also zu einer durch die Punkte a, b, c qualitativ beschriebenen Verteilung von  $v_\varphi$ .

Wir wollen nun die Auswirkungen der Rotation numerisch mit folgendem  $v_\varphi$ -Profil studieren: der radiale Verlauf von  $v_\varphi$  sei durch das Dreiecksprofil

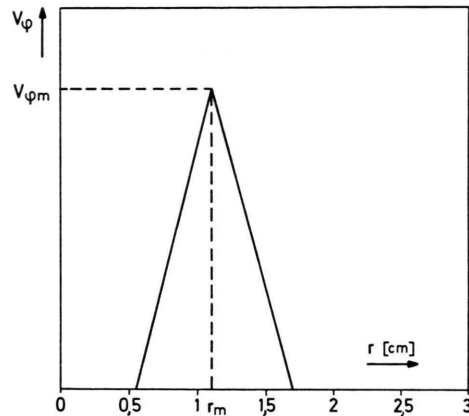


Abb. 13. Radiales Profil der Rotationsgeschwindigkeit  $v_\varphi$ .

nach Abb. 13 gegeben; der Wert des radialen Maximums  $v_{\varphi m}$  fällt von seinem größten Wert ( $v_{\varphi \max}$ ) vor der Kathode linear auf Null vor der Anode ab. Die Abb. 14, 15 und 16 zeigen die berechneten radialen Verteilungen von  $E_z$ ,  $j_z$  und  $T$  bei  $z = L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{\varphi \max}$ . Rotationsgeschwindigkeiten vor der Kathode bis zu  $10^5$  cm/sec ändern bei dem angelegten Magnetfeld  $B_0 = 1$  Tesla nur wenig am  $E_z$ -Profil, Geschwindigkeiten zwischen  $3 \cdot 10^5$  und  $5 \cdot 10^5$  cm/sec lassen schon die Schulter verschwinden, noch größere Werte von  $v_{\varphi \max}$  führen schließlich zu negativen Werten von  $E_z$  in der Rand-

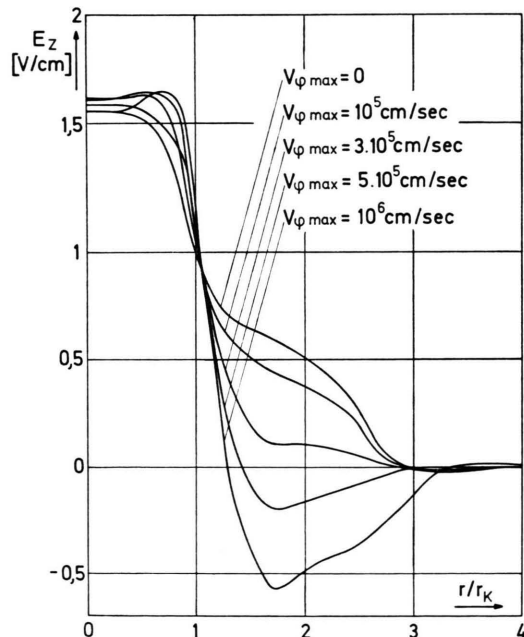


Abb. 14. Radiale Profile von  $E_z$  bei  $z = L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{\varphi \max}$ .

<sup>14</sup> O. KLÜBER, Z. Naturforsch. **24 a**, 1473 [1969].

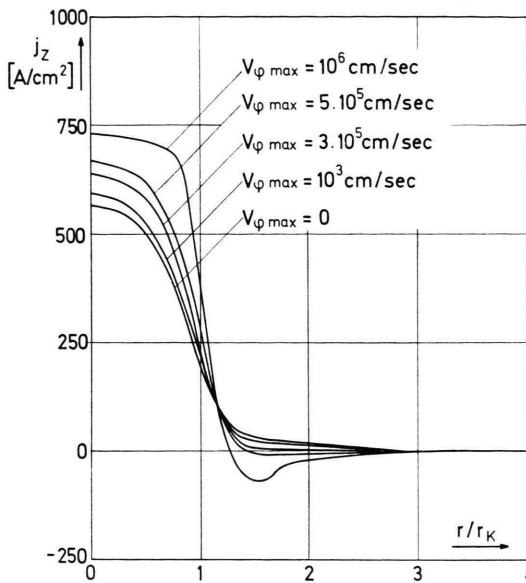


Abb. 15. Radiale Profile von  $j_z$  bei  $z=L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{\phi \max}$ .

zone. Weit außerhalb des heißen Bogens verschwindet  $E_z$  für alle Werte von  $v_{\phi \max}$ , da der Hall-Parameter  $\omega_e \tau_e$  hier sehr große Werte annimmt. Die Profile von  $j_z$  und  $T$  zeigen eine zunehmende Konzentration des Stromes auf den Kern des Bogens und die entsprechende Erhöhung der Achsentemperaturen mit wachsenden Werten von  $v_{\phi \max}$ . Schnelle Rotationen der Bogensäule beeinflussen also direkt die Feldverteilung in der Entladung und üben damit auch einen mittelbaren Einfluß auf die Temperaturverteilung aus.

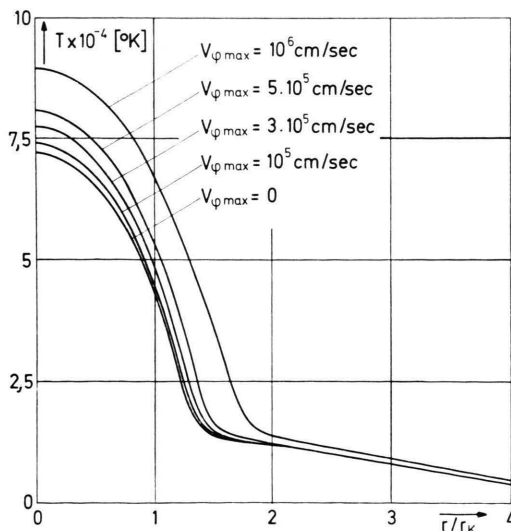


Abb. 16. Radiale Temperaturprofile bei  $z=L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{\phi \max}$ .

### 5.3. Der Einfluß einer radialen Strömung

Die Annahme einer bestimmten Verteilung der Rotationsgeschwindigkeit  $v_{\phi}$  führt zwar zu  $E_z$ -Profilen, deren Form mit Messungen übereinstimmt, läßt aber eine weitere Diskrepanz ungeklärt: die Achsenwerte von  $E_z$  nach Abb. 14 sind nur etwa halb so groß wie die Meßwerte (Abb. 12). Das bedeutet aber, daß dem Bogen mehr Energie zugeführt werden muß als unser theoretisches Modell erwarten läßt. Bisher haben wir angenommen, daß die radialen Verluste der Entladung nur durch Wärmeleitung verursacht werden. Statt dieser Vereinfachung wollen wir nun eine Gasströmung vom Zentrum des Bogens radial nach außen annehmen (s. Punkt f in Abschnitt 2.2). Zum numerischen Studium dieser konvektiven Kühlung des Bogens machen wir folgende vereinfachende Annahmen:

- bei der Berechnung der inneren Energie  $u$  berücksichtigen wir die Dissoziations- und Ionisationsenergien nicht, d. h. wir vernachlässigen die Kühlung des Bogens durch konvektiven Transport von Reaktionsenergie,
- das radiale Profil von  $v_r$  sei durch ein Dreiecksprofil gegeben (Abb. 17),
- $v_r$  hängt nicht von  $z$  ab.

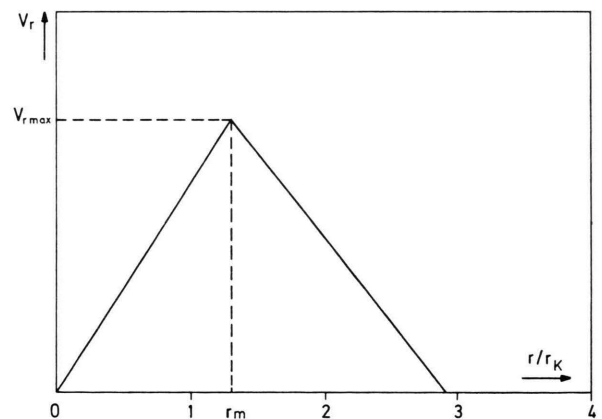


Abb. 17. Radiales Profil der Strömungsgeschwindigkeit  $v_r$ .

Dieses drastisch vereinfachte Geschwindigkeitsprofil erfüllt offensichtlich die Kontinuitätsgleichung nicht. Es soll deshalb nur als mathematisches Modell verstanden werden, durch das wir eine physikalisch sehr komplizierte Situation approximieren wollen.

Die Höhe des Geschwindigkeitsmaximums ( $v_{r \max}$ ) und seine Lage ( $r_m$ ) werden wir variieren. Gleichzeitig wollen wir annehmen, daß im Bogen die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Verteilung



von  $v_\varphi$  (Abb. 13) mit  $v_{\varphi \max} = 5 \cdot 10^5$  cm/sec vorliegt. Die Abb. 18 und 19 zeigen Temperaturprofile bei  $z = L/2$  für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten, deren Maxima  $v_{r \max}$  bei  $r_m = 0,9$  cm bzw.  $r_m = 1,3$  cm auftreten. Man erkennt, daß die Größe der Geschwindigkeiten und auch die Lage ihres Maximums die Temperaturverteilungen beeinflussen.

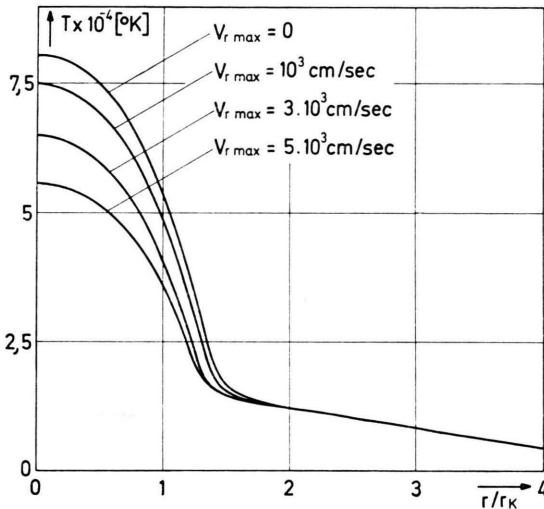


Abb. 18. Radiale Temperaturprofile bei  $z = L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{r \max}$  für  $r_m = 0,9$  cm.

Bei festgehaltener Lage des Maximums sinken die Temperaturen mit wachsender radialer Strömungsgeschwindigkeit, da die konvektive Kühlung zunimmt. Dieser Einfluß wird geringer, wenn das Maximum von  $v_r$  radial nach außen wandert. Außerdem hängt die Form der radialen Temperaturverteilung von  $r_m$  ab.

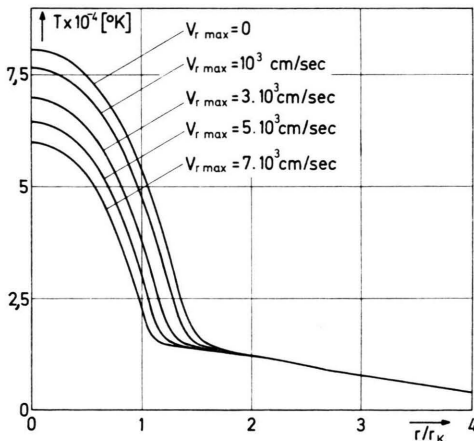


Abb. 19. Radiale Temperaturprofile bei  $z = L/2$  für verschiedene Werte von  $v_{r \max}$  für  $r_m = 1,3$  cm.

Die Abb. 20 und 21 zeigen die radialen Profile von  $E_z$  und  $j_z$  bei  $z = L/2$  ohne radiale Strömung und mit einer Strömung, deren Maximum  $v_{r \max} = 7 \cdot 10^3$  cm/sec bei  $r_m = 1,3$  cm liegt. Während sich die beiden  $j_z$ -Verteilungen kaum unterscheiden, führt die konvektive Kühlung zu einem Anstieg von  $E_z$  in der Achse von 1,58 V/cm auf 2,57 V/cm. Entsprechend steigt die bei  $z = L/2$  pro cm umgesetzte Leistung von 2,72 kW/cm auf 3,84 kW/cm an.

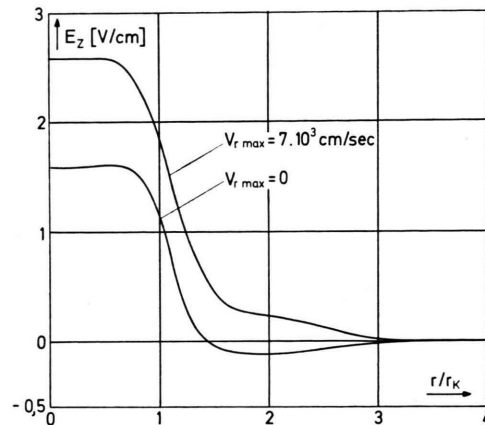


Abb. 20. Radiale Profile von  $E_z$  bei  $z = L/2$  für  $v_{r \max} = 0$  und  $7 \cdot 10^3$  cm/sec.

Die beschriebene numerische Untersuchung zum Einfluß von  $v_r$  soll wegen ihrer radikalen Vereinfachungen nur als eine Abschätzung betrachtet werden. Diese zeigt aber sehr deutlich, daß schon relativ kleine Geschwindigkeiten zu Energieverlusten führen, die wesentlich ins Gewicht fallen. Die Ursache dafür liegt in der starken Reduzierung der radialen Kontaktwärmeleitung durch das Magnetfeld.

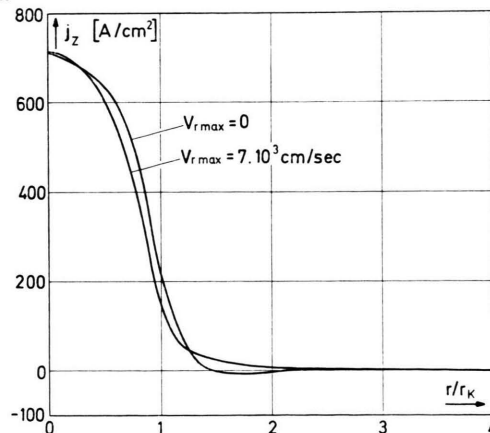


Abb. 21. Radiale Profile von  $j_z$  bei  $z = L/2$  für  $v_{r \max} = 0$  und  $7 \cdot 10^3$  cm/sec.

## 6. Zusammenfassung

Die theoretischen Untersuchungen haben gezeigt, daß ein stationärer Lichtbogen mit kleinen Elektroden in einem starken axialen Magnetfeld im allgemeinen auch dann nicht zu einem unendlich langen (zylindersymmetrischen) Bogen idealisiert werden kann, wenn seine Länge wesentlich größer ist als sein optischer Durchmesser. Das Magnetfeld führt zu einer Abhängigkeit des axialen elektrischen Feldes vom Radius, die ja bei Zylindersymmetrie gerade nicht besteht.

In einem strömungsfreien Bogen liegt die Ursache für dieses Verhalten allein in der starken Reduzierung der elektrischen Leitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld.

Im Sinne hoher Achsentemperaturen hat ein solcher Bogen eine optimale Länge, die durch das Wechselspiel von Endverlusten und Konzentration der elektrischen Feldstärke bestimmt wird.

Mit abnehmendem Kathodendurchmesser steigen die Temperaturen an, da der Strom auf die Achse konzentriert wird.

Vom Ort der kalten Rohrwand hängen die Temperaturen nur wenig ab, d. h. der Bogen wird stark durch die Elektroden stabilisiert (der Abstand der Wand von der Bogenachse muß natürlich immer noch wesentlich größer sein als der Radius der kleineren Elektrode).

Mit Erhöhung des axialen Magnetfeldes steigen die Temperaturen nicht stark an, da gleichzeitig der Druck in der Entladung wächst. Das aber vermindert den Einfluß des Magnetfeldes auf die Transportvorgänge senkrecht zu  $\mathbf{B}$ .

Zu diesen Effekten kommt der Einfluß von Strömungen im Bogen. Verteilungen der Rotationsgeschwindigkeit im Bogen, die durch Experimente nahegelegt werden, führen direkt zu Modifizierungen

der Potentialverteilung. Mittelbar werden dadurch auch die Temperaturverteilungen geändert. Schnelle Rotationen können sogar zu einer Umkehr des axialen elektrischen Feldes im Außenbereich des Bogens führen.

Wesentlichen Einfluß auf die Energiebilanz können radiale Strömungen besitzen, die bei Experimenten mit massiven Elektroden durchaus vorstellbar sind. Da die radiale Wärmeleitung durch das Magnetfeld stark reduziert wird, führen schon relativ geringe Strömungsgeschwindigkeiten zu merklichen Energieverlusten.

Aus der Wichtigkeit von Strömungen im Bogen für Potentialverteilung und Energiebilanz folgt für weitere Arbeiten die Notwendigkeit, auch noch die Kraftgleichung in das System der zu lösenden Gleichungen einzubeziehen.

Wir bedanken uns bei Frau H. WILHELM für ihre vielfältige Unterstützung bei der Programmierung unserer Probleme für die Rechenmaschine.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.

## Anhang

### Die wichtigsten Bezeichnungen

$\Phi$	elektrisches Potential	$T$	Temperatur
$E$	elektrische Feldstärke	$S$	Wärmestrompotential
$j$	elektrische Stromdichte	$T_w$	Wandtemperatur
$I$	Gesamtstrom	$T_E$	Temperatur vor den Elektroden
$\mathbf{B}$	magnetische Induktion	$p_A$	Gesamtdruck im kalten Gas
$\mathbf{h}$	Einheitsvektor zu $\mathbf{B}$	$p_e$	Elektronendruck
$B_0$	axiale Komponente von $\mathbf{B}$	$r_A$	Anodenradius
$\omega_e \tau_e$	Hall-Parameter der Elektronen	$r_K$	Kathodenradius
$\ln \lambda$	Coulomb-Logarithmus	$r_w$	Gefäßradius
$\mathbf{v}$	Schwerpunktgeschwindigkeit	$L$	Elektrodenabstand